非平衡相転移におけるDP予想

乾　徳夫、高安　秀樹、A. Yu. Tretyakov
(東北大学情報科学研究科）

Interacting particle sytem[1,2]では、粒子がその空間配置により消滅、生成される。様々なモデルが吸収点に落ち込むか粒子の生成、消滅を持続するかにより相転移を起こす。（1+1）次元系において吸収点が１つ持つモデルは方向性を持ったパーコレーションモデルであるDirected Parcolation (以下ＤＰと略）と同じuniversarity class に属すると予想されている（ＤＰ予想）。今回の研究会では、ＤＰ予想に関連した話題について発表を行った。

１．序論

自己触媒系のSchlogl'sモデル［3,4,5,6］の解析や素粒子の分野におけるReggon filed theory［7］により非平衡相転移にもUniversarityが存在することが明らかになってきた。近年、触媒表面上の非平衡相転移（実験においても観察されている。）が多くの研究者に注目され多種多彩なモデル［8］が提案されてきたが、その多くはＤＰuniversarity classに属することが数値的に示されている。

まず、非平衡相転移を示す最も単純なモデルある１次元Contact Process（以下ＣＰ）[9]について解説する。

２．Contact Process

空間としては１次元格子を、時間に関しては連続とする。各格子は粒子に占有されているか、空かのどちらかである。時刻t=0に粒子を分布させ（ただし、粒子数は０でないとする）、系は以下のルールに従い時間発展をする。

(1)　各粒子は周囲の粒子状態には無関係に、あるrateで消滅する。その

rateを１とする。

(2)　空である格子は、左右のどちらか一方のみが粒子により占有されている場合は、rate λ で粒子が生成される。左右の両方とも粒子により占有されている場合は、rate 2λ で粒子が生成される。

全ての粒子が消滅した状態は、自発的な粒子生成がない（この系は非可逆である）のでそれ以後の状態は変化しない。つまり吸収点である。

有限系であれば、λ によらずまた初期状態に無関係に系はこの吸収点に落ち込んでしまう。しかし、無限系であれば λ がある臨界点 λ_c より大きい場合、非自明な（粒子数０でない）定常状態が存在する。図１は１個の粒子から出発した場合の反応持続相と消滅相を表している。また臨界点近傍の変化は図２の様な連続相転移である（厳密に証明されている）。

自然な疑問として

(1)　臨界点 λ_c の値は？

(2)　臨界点近傍の振る舞いは？

(3)　定常分布の形は？

が挙げられる。しかし、１次元系においてさえこれら全てが未解決の問題である。(1)に関しては、Monte Carlo 法や様々な近似解析から $\lambda_c=1.649...$[10]と推定されている。厳密な上限と下限は、最近、香取氏と今野氏より飛躍的に改良された［11］。(2)に関しては、平衡系と同様に次のように羃関数で表現できると信じられている。

$$\mathrm{Prob.}\{\text{吸収点に落ち込む}\} = c\,|\,\lambda - \lambda_c\,|^{\beta} \qquad (1)$$

ここでcは定数であり β は臨界指数で、0.277 ± 0.01[10.12]と推定されている。(3)に関してはこの系が<u>詳細釣り合いを満たさないため</u>その具体的な形は全く解かっていない［13］。

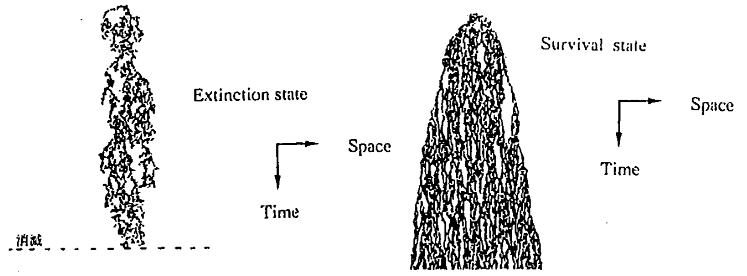

図１．１個の粒子から出発した時の軌跡

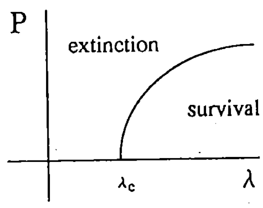

図２．ＣＰの相図

3. Directed Parcolationと臨界指数β

2次元ボンドDP[14,15]は図3の様に下向きのボンドで格子間を確率pで結び、確率1-pで空にしておく。Aから矢印の向きに添ってたどり着くことのできる点の集合をクラスターと考えるとき、AとB、またCは同じクラスターに属しているがAとDは接続していない。

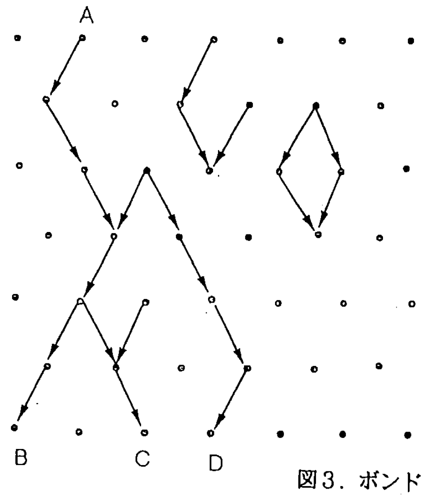

図3. ボンドDP

原点が無限遠の点と接続している確率はpを臨界点p_cより大きくしていくと0からnon-0に転移を起こす。臨界点p_c近傍は、式(1)で$\lambda \rightarrow p$（$\lambda c \rightarrow p_c$)としたもので表せる。また臨界指数$\beta$はCPと同じ値を持つ、つまり、CPはDPと同じuniversarity classに属すると予想されている。そこで、多くの研究者が次の予想を信じている。

[DP予想]
(1+1)次元系においてオーダーパラメターがスカラーで吸収点が1個の場合その系が相転移を起こすならばDPuniversarity class に属する。

4. Branching Annihilating Random Walks (BARW)

DP予想を考える時、BARWは多くの情報を与えてくれるモデルである。BARWは以下のルールに従う（図4）。

[BARW]
1次元格子と離散時間で考える。
(1) 粒子をランダムに選ぶ。
(2) 確率pで左右のどちらかの最隣接格子にランダム移動する。
(3) 確率1-pでn個の粒子が最隣接格子に分岐する（分岐の位置は偶数の場合には左右均等に、nが奇数の場合左右のどちらかをランダムに選び、そ

の方向に１個多く粒子生成する。例えば、n=３であれば、最初に選ばれた格子の位置をjとすると（j-1,j+1,j+2)か（j-2,j-1,j+1)に粒子を生成する）。

(4)　2個の粒子が同じ格子を占める場合は対消滅が起こり格子は空になる。ＣＰの場合粒子は単独で消滅するが、ＣＰと著しく異なりBARWの場合は２個の粒子の相互作用により消滅する。また、分岐は必ずしも粒子を生成するとは限らない。n=1場合に相転移の存在をM.Bramson &L.Grayが証明した。その後、様々な条件下でMonte Carlo 法 が行われ、以下の結果が得られた［17］。

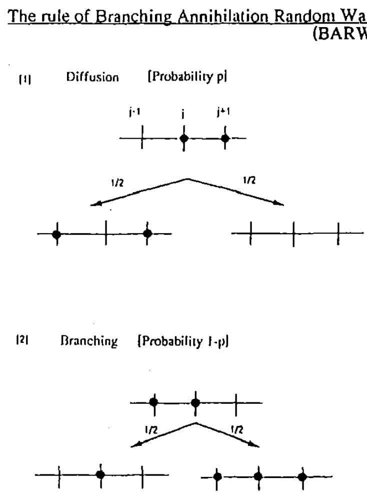

図4．BARWの規則

１次元 BARW

n	p_c	β
1	0.108±0.001	0.32±0.01
2	0	
3	0.461±0.002	0.33±0.01
4	0.72±0.01	0.7±0.1
5	0.718±0.001	0.33±0.01

この様にBARWは少し条件を変えると、臨界点近傍の様相が著しく異なる。我々は、まず厳密にn=2場合は相転移がおこらないを示した［18］。n=2場合は特殊な対称性がある。また、この場合はある種の変換により１次元系触媒反応の最も基本的なモデルに変換できる。次にCoherent 異常法（CAM)によりn=1のBARWはＤＰuniversarity classに属することが示された[19］。実際、精度を上げたMonte Carlo 法[20]により確認されている。ところが、nが偶数の場合（n=2を除く）はＤＰ予想に反するようにみえる。実際βはＤＰとは大きく異なる、しかし、この系は粒子数のparityを保存するため、初期状態の粒子数が奇数個ならば相転移を起こさない。上のデータは初期状態の粒子数を偶数個に限定したときの値である。つまり、ＤＰ予想の吸収点が１個という条件に反しているのである。最近、I. Jensen［21］は単独消滅をルールに付け加えて、粒子数のparity保存性を破ることによりＤＰuniversarity classに移行することをMonte Carlo 法で示した。しかし、吸収点の数が2個以上ならば、必ずＤＰuniversarity classに属さないというわけではない。吸収点が無限個ある場合でＤＰuniversarity classに属するモデル

が報告されている［22］。現在、どのような性質を持てばＤＰuniversarity classに属するのかを判定する基準が明確ではない。先に述べたＤＰ予想はもっと広い範囲に対して成立する可能性がある。

5．繰り込み法による解析[20,23]

現在のところ、数値的には、ＤＰ予想に対する反例は見つかっていない。もし正しいならどのようにすれば解決できるであろうか。近似的には繰り込み法を用いてある程度解析できる。基本的なアイデアは図５（格子を円で表し、粒子に占有されている時黒丸で示す）の様に、４個の連続した格子を連続する２個の繰り込まれた格子とみなし、時間に関しては4ステップを繰り込んで１ステップとみなす。また、元の２個の格子上に１個でも粒子があれば、繰り込まれた格子上にも粒子が存在するとみなす。図６はMonte Carlo 法で繰り込みを行った結果を示す。ここでは、白円が粒子を表す（ただし、４ステップごとに黒丸で強調されている）。左端が元の時空間での軌跡であり、１度繰り込むと右へ移る。

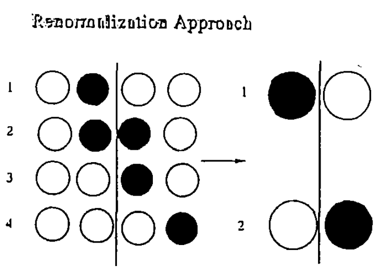

図５．繰り込みの規則

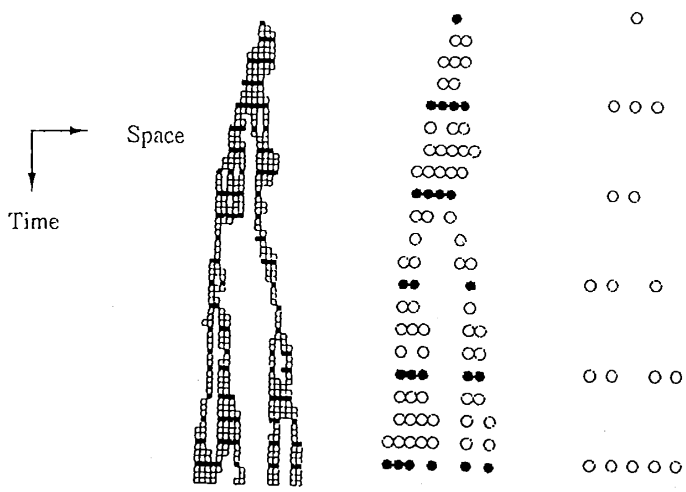

図６. Monte Carlo法による繰り込み

繰り込まれた粒子のルールは粗視化を行う度に変化することがわかる。理論的にはspin系やparacolationの様に簡単には粗視化できない。その理由は、定常状態の形が不明であるかである。そのために、平均場と組み合わさなければならない。我々は、BARWのルールは繰り込みによりＣＰへ遷移し、これがBARW がＣＰと同じuniversarity classに属する理由と考えている（ＣＰ，Reggon場がＤＰと等価であることはJ. L .Cardy & R. L. Sugarにより数値的にではあるが示されている)。

6．結語

繰り込み法は、直観的には解かりやすいが、完全な解決からは程遠いものである。臨界指数βの値について少し触れる。ＤＰはその異方性の為に平衡系で著しい成果を修めたconformal feild thoryが利用できない。しかし、Cardy やBaxterらはβは有理数で表すことができ、β＝199/720と予想している。以前は等方的な２次元parcolationの臨界指数の２倍であるβ＝5/36と思われていた。どちらの指数が正しいのか、また、全く別の値を持つのか解かっていない。いずれにせよ、格子上の非平衡相転移（異方性を持った系）に対する統一的な理論が待たれる。

数々の問題にお答えくださった香取先生と今野先生に心よりお礼申し上げます。また、発表の機会を与えてくださった有光教授に感謝いたします。

［参考文献］

[1] T. M. Liggett, "Interacting Particle Systems"(Springer-Verlag,New York) (1985)
[2] R.Durrett,"Lecture Notes on Particle Systems and Percolation"(Wadsworth and Brooks/Cole,Pacific,California).
[3] F.Schlogl, Z.Phsik 248(1971) ;446
[4] F.Schlogl, Z.Phsik 253(1972) ;147
[5] G.Nicolis and J.W.Turner, Physica 89A(1977) ;326
[6] P.Grassberger, Z. Phys. B47(1982) ;365
[7] J. L. Cardy and R. L. Sugar, J. Phys. A13(1980) ;L423
[8] R. M. Ziff,E. Gulari, and Y. Barshad, Phys. Rev. Lett. 56(1986) ;2553
[9] T. E. Harris, Ann.Prob.2(1974) ;969
[10] M. Katori and N. Konno, J. Phys. Soc. Jpn. 59(1990) ;1581
[11] M. Katori and N. Konno,"Formation, Dynamics and Statics of Patterns vol2"(World Scientific)
[12] R. Dickman, J. Stat. Phys.55(1989) ;55
[13] M. Katori (日本物理学会誌掲載予定)

[14] R.J.Baxter and A. J. Guttmann, J.Phys.A16(1983) ;3193
[15] K. De'Bell and J.W. Essam, J.Phys.A16(1983) ;385
[16] M.Bramson and L.Gray, Z.Wahrsch.verw.Gebite 68(1985) ;447
[17] H.Takayasu and A. Yu. Tretyakov, Phys. Rev. Lett. 68,(1992) ;3060
[18] H.Takayasu and N.Inui, J. Phys. A25(1992) ;L585
[19] N.Inui, (Phys. Lett. A,in press.)
[20] N.Inui ,H.Takayasu and A. Yu. Tretyakov,(FRCTALS, to be published.)
[21] I. Jensen submitted to J.Phys. A.
[22] I. Jensen and R.Dickman,Phys. Rev. E48 ;1710
[23] H.Takayasu, N.Inui and A. Yu. Tretyakov,(Phys.Rev. E.,in press.)